

Rozwiązanie:

W układzie mogą wystąpić dwa mechanizmy zniszczenia. Pierwszy, typowy dla łuku dwu przegubowego ($H < \sigma_p F$) realizuje się przez powstanie trzech przegubów plastycznych. Natomiast drugi powstaje po uplastycznieniu ściągu, kiedy $H = \sigma_p F$. Warunek jednoczesnego wystąpienia obu mechanizmów pozwoli na określenie pożądanego przekroju ściągu.

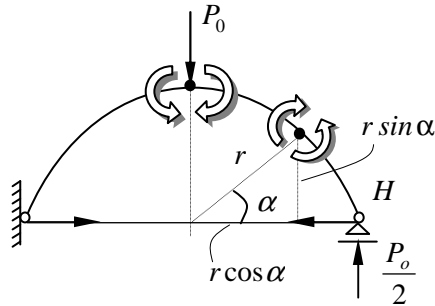
W pierwszym mechanizmie zniszczenia warunki równowagi granicznej mają formę

$$Hr \sin \alpha - \frac{P_0}{2}(r - r \cos \alpha) - M_p = 0$$

$$Hr - \frac{P_0}{2}T + M_p = 0$$

stąd

$$P_0 = \frac{2M_p}{r} \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}$$



Rys. 6.11b

$$H = \frac{P}{2} M_p = M_p \left(\frac{1}{r \sin \alpha + \cos \alpha - 1} - 1 \right)$$

Położenie dodatkowego przegubu określa warunek

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0 [\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha - 1) - (-\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha)] [\cos \alpha + \sin \alpha - 1]^{-2} = 0$$

stąd

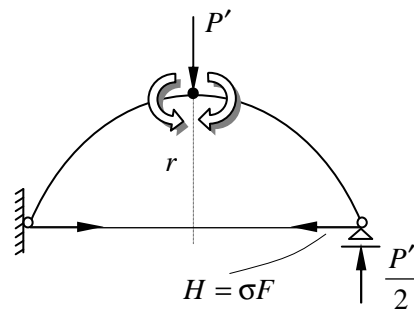
$$2 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Rightarrow 1 + \sin \alpha = 2\sqrt{1 - \sin \alpha}$$

Po podstawieniu $Y = \sin \alpha$ otrzymuje się równanie kwadratowe, którego pierwiastki $Y = \sin \alpha (1/3 \cdot i - 1)$ odpowiadają poszukiwanemu położeniu dodatkowego przegubu w łuku.

Warunki równowagi w drugim mechanizmie mają postać

$$Hr - \frac{P'}{2}T + M_1 = 0 \Rightarrow P' = 2\left(H + \frac{M_1}{r}\right)$$

$$-P' + V_1 + V_2 = 0 \quad V_1 = V_2 = \frac{P'}{2}$$



Rys. 6.11c

Warunek jednoczesnego wystąpienia obu mechanizmów zniszczenia przyjmie formę

$$P_0 = P' \Rightarrow \frac{2M_p}{r} \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1} = 2\left(H + \frac{M_p}{r}\right)H = \sigma_p F$$

Poszukiwaną wartość przekroju poprzecznego ściągu obliczymy z wyrażenia

$$F = \frac{M_p}{\sigma_p r} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} - 1 \right)$$

Szacowanie przemieszczeń granicznych

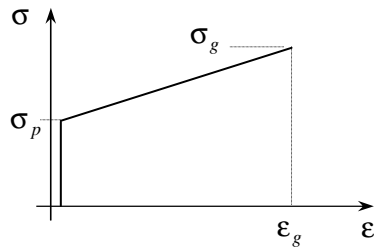
Model ciała sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem pozwala na szacowanie granicznych wartości przemieszczeń, towarzyszących szczególnym procesom narastania obciążeń.

W jednowymiarowym przypadku model sztywno-plastyczny ze wzmocnieniem ten opisany jest zależnościami

$$\sigma_g - \sigma_p = E' \varepsilon_g, \Rightarrow E' = \frac{\sigma_g - \sigma_p}{\varepsilon_g}$$

dla $\sigma > \sigma_p$ jest $\varepsilon_p|_{=0} < \varepsilon < \varepsilon_g$

dla $\sigma < \sigma_p$ jest $\varepsilon = 0$



Rys. 6.0c

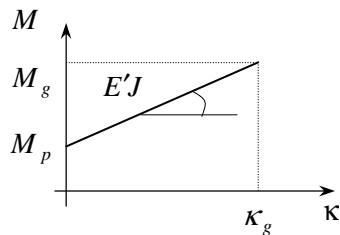
W przekroju zginanego pręta po pełnym uplastycznieniu przekroju rozpoczyna się proces narastania deformacji, który kończy się w chwili osiągnięcia zniszczenia przekroju, kiedy $\sigma = \sigma_p$.

$$M = \int_F \sigma x_3 dF \Rightarrow M = \int_F (E' \kappa x_3 + \sigma_p) x_3 dF$$

$$M - M_p = E' J \kappa$$

stąd

$$\kappa = \frac{M - M_p}{E' J}$$



Rys. 6.0d

Zależność łącząca krzywiznę pręta κ z wartościami momentu nadwyżkowego $M - M_p$ oraz sztywnością EJ gdzie E jest modułem wzmocnienia pozwala na szacowanie przemieszczeń granicznych.

Wykorzystując zasadę prac dopełniających otrzymamy wzór pozwalający określać przemieszczenia graniczne u_i

$$1_i u_i = \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_S \int_F \delta \sigma_{11} x_3 dF \kappa ds$$

stąd

$$1_i u_i = \int_S \frac{M_g - M_p}{E'J} M_1 ds$$

gdzie

$$\int_F \delta \sigma_{11} x_3 dF = M_1$$

Do wyznaczenia wartości nieznanymi przemieszczeń granicznych u_i stosujemy tradycyjne sposoby tj. „przemnożenia” wykresów momentów jednostkowych M_1 pochodzących od działania siły jednostkowej przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia granicznego u_i przez wykresy momentów nadwyżkowych. Należy przy tym pamiętać, iż siła I_i działa w samo-zrównoważonym mechanizmie na jaki zamieni się wyjściowy układ po uplastycznieniu. Zakładamy też, że od stanu uplastycznienia konstrukcji do zniszczenia występuje proporcjonalny przyrost obciążeń.

ZADANIE 6.12.

Wykorzystując zasadę prac dopełniających należy wyznaczyć przemieszczenia graniczne u_i w belce i ramie dla modelu sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem.

Rozwiązanie:

Do określenia przemieszczenia granicznego wykorzystamy zasadę prac dopełniających przy dodatkowym założeniu, że $\delta p_i = 1_i (s - s_0)$ jest siłą jednostkową przyłożoną w miejscu i kierunku przemieszczenia granicznego u_i .

Równanie zasady prac dopełniających przyjmie po utworzeniu się zespołu przegubów plastycznych postać

$$\int_A \delta p_i u_i dA = \int_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \Rightarrow 1_i u_i = \int_S \delta M \kappa ds \quad \text{gdzie} \quad \kappa = \frac{M - M_p}{E'J}$$

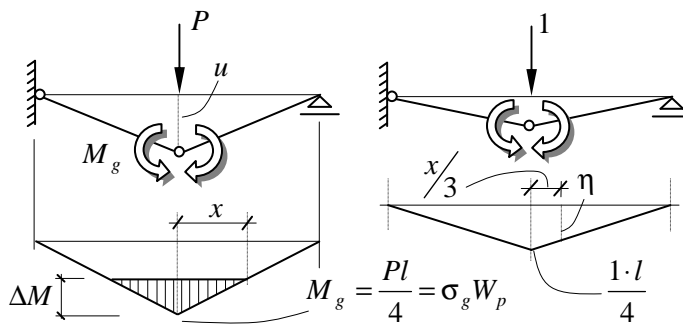
gdzie $\kappa = \frac{M - M_p}{E'J}$ jest krzywizną w tych częściach układu gdzie moment zginający M spełnia warunki $M_p \leq M < M_g$.

a) W przypadku belki wolnopodpartej mechanizmy zniszczenia oraz przyporządkowane im wykresy momentów nadwyżkowych i jednostkowych mają postać

$$x = \frac{M_g - M_p l}{M_g} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

$$E' = \frac{\sigma_g - \sigma_p}{\varepsilon_g}$$



Rys. 6.12a

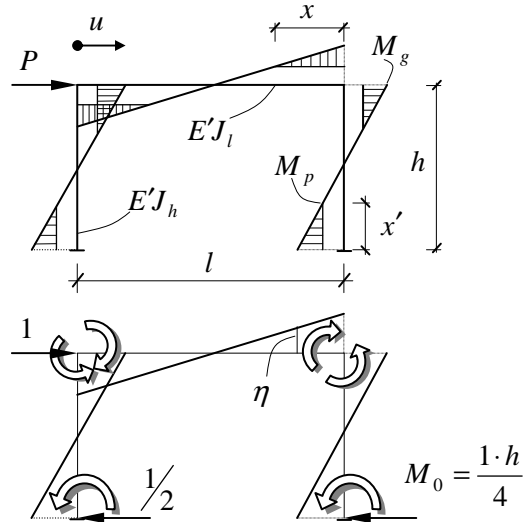
Wartość granicznego przemieszczenia u wynosi

$$u = \frac{2}{E'J} \left[\frac{M_g - M_p}{2} x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \right] \quad \text{gdzie} \quad x = \frac{M_g - M_p l}{M_g} \cdot \frac{l}{2}$$

b) W przypadku ramy obciążonej siłą poziomą P mechanizm zniszczenia oraz wykresy momentów nadwyżkowych $M_g - M_p$ oraz jednostkowych mają postać

$$x = \frac{M_g - M_p}{M_g} \frac{l}{2}, \quad x' = \frac{M_g - M_p}{M_g} \frac{h}{2}$$

$$\eta = \frac{2M_0}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right), \quad \eta' = \frac{2M_0}{h} \left(\frac{h}{2} - \frac{x'}{3} \right)$$



Rys. 6.12b

Przemieszczenie graniczne u wyliczymy z zasady prac dopełniających, wykorzystując „przemnożenie” wykresów momentów

$$u = \frac{2}{E'J_l} \left[(M_g - M_p) \frac{x}{2} \frac{2M_0}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{4}{E'J_h} \left[(M_g - M_p) \frac{x'}{2} \frac{2M_0}{h} \left(\frac{h}{2} - \frac{x'}{3} \right) \right]$$

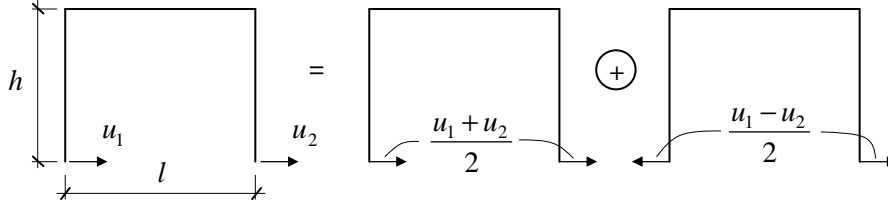
ZADANIE 6.13.

Podpory ramy 1 i 2 doznają poziomego przemieszczenia u_1 i u_2 wywołanego przez rozpełzanie terenu na którym posadowiono ramę.

Należy wyznaczyć przemieszczenia graniczne podpór konstrukcji jak na rys. 6.13a w przypadku ciała sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem.

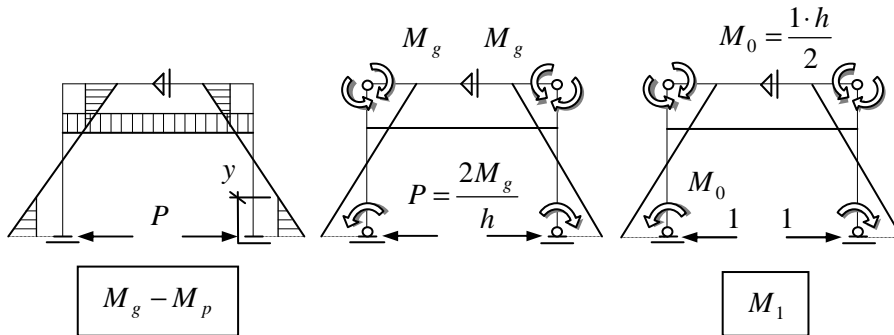
Rozwiązanie:

Ruch ramy w wyniku rozpełzania terenu jest sumą sztywnego przesunięcia o wartości $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ oraz różnicy przemieszczeń wywołujących stany naprężeń w ramie.



Rys. 6.13a

Rama w której występuje symetryczne rozpełzanie zastąpimy równoważnym kinetycznie układem z uzewnętrznionymi poziomymi siłami P .



Rys. 6.13b

Pierwszy z wykresów odpowiada uplastycznieniu konstrukcji w wyniku powstania czterech przegubów plastycznych M_p w narożach ramy. W miarę wzrostu siły poziomej P w narożach pojawią się momenty graniczne M_g a w ich otoczeniu wystąpią deformacje plastyczne konstrukcji. Zasięg stref deformacji plastycznych y obliczymy z podobieństwa trójkątów występujących w wykresach momentów zginających

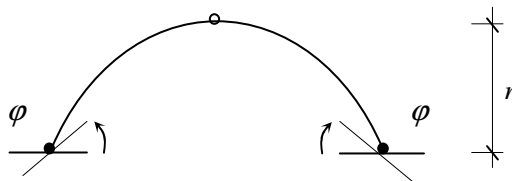
$$\frac{M_g - M_p}{y} = \frac{M_g}{\frac{h}{2}} \Rightarrow y = \frac{h(M_g - M_p)}{2M_g}$$

Poziome przemieszczenie graniczne wyznaczmy „przemnażając” wykresy momentów nadwyżkowych oraz jednostkowego

$$\frac{u_1 - u_2}{2} = \left[2 \frac{M_g - M_p}{2} \frac{h(M_g - M_p)}{2M_g} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{3} \right) + \frac{(M_g - M_p)l}{2} \cdot \frac{1h}{2} \right] \frac{1}{E'J}$$

ZADANIE 6.14.

W łuku kołowym z przegubem w kluczu podpory sztywno utwierdzone doznają obrotu w wyniku ruchów podłoża. Należy określić graniczną wartość tych obrotów przyjmując w rozważaniach model ciała sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem.



Rys. 6.14a

Rozwiązanie

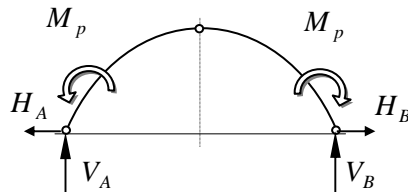
Uzewnętrzając przyczyny wywołujące obroty podpór otrzymujemy zastępczy układ w którym w podporach pojawiają się uplastycznienia. Siły w więzach oraz rozkłady momentów zginających mają postać

Równania równowagi

$$V_A 2r - M_p + M_p = 0$$

$$V_B 2r - M_p + M_p = 0$$

$$V_A r - H_A r - M_p = 0$$



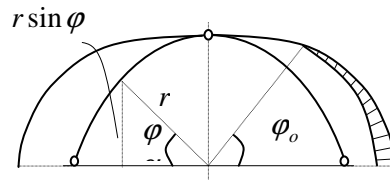
Rys. 6.14b

Siły w więzach oraz funkcja momentów zginających mają postać

$$V_A = V_B = 0$$

$$H_A = H_B = \frac{M_p}{r}$$

$$M = -M_p + H_A r \sin \varphi = -M_p (1 - \sin \varphi)$$



Rys. 6.14c

W trakcie dalszego procesu narastania deformacji rosną momenty zginające $M_p \rightarrow M_g$

$$M = -M_g (1 - \sin \varphi)$$

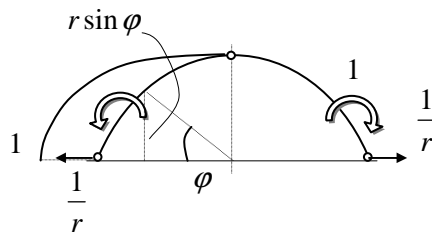
Obszar w którym wystąpią momenty nadwyżkowe wyznaczmy z zależności

$$M_p = -M_g (1 - \sin \varphi_0) \quad \text{stąd} \quad \varphi_0 = \arcsin \left(\frac{M_p}{M_g} + 1 \right)$$

Wnosimy stąd, że deformacje wystąpią w obszarze $(0, \varphi_0)$ w otoczeniu podpór A i B.

Wyznamy z kolei rozkład momentów jednostkowych

$$M = -1 + \frac{1}{r} r \sin \varphi = \sin \varphi - 1$$



Rys. 6.14d

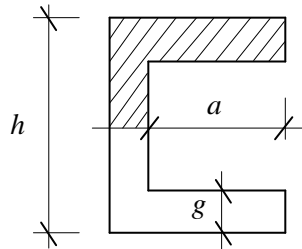
Stosując zasadę prac dopełniających oraz wykorzystując symetrię zadania wyznaczmy wartość granicznego obrotu podpór łuku

$$\begin{aligned}\psi_{gr} &= \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{E'J} [(M_g - M_p)(\sin \varphi - 1)](\sin \varphi - 1) r d\varphi = \\ &= \frac{M_g - M_p}{E'J} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + 2 \cos \varphi + \varphi \right] \Big|_0^{\varphi_0} = \\ &= \frac{M_g - M_p}{E'J} \left[\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin 2\varphi_0}{4} + 2 \cos \varphi_0 + \varphi_0 - 2 \right]\end{aligned}$$

Występujące w tym wzorze wartości momentów M_g , M_p , J , E' dla przekroju ceowego wyznaczmy z równań

$$M_p = \sigma_p W_p$$

$$M_g = \sigma_g W_p$$



Rys. 6.14e

gdzie

$$W_p = 2 \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{4} - 2 \left[\frac{1}{2} (a-g) \left(\frac{h}{2} - g \right)^2 \right]$$

$$J = \frac{ah^3}{12} - \frac{(a-g)(h-2g)^3}{12}$$

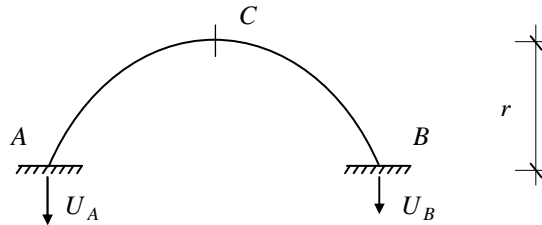
$$E' = \frac{\sigma_g - \sigma_p}{\varepsilon_g}$$

Podstawiając wyliczone wielkości do wzoru na kąt obrotu φ_{gr} otrzymamy wartość obrotu granicznego podpór łuku.

ZADANIE 6.15.

Podpory łuku bezprzegubowego doznają pionowych przemieszczeń U_A i U_B w wyniku ruchów podłoża.

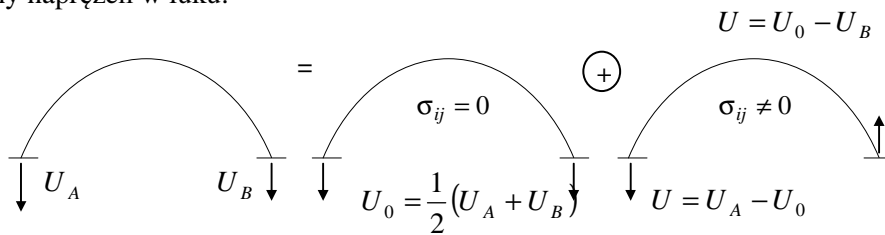
Należy określić graniczną wartość tych przemieszczeń poprzedzającą zniszczenie konstrukcji. Obliczenia przeprowadzić dla modelu ciał sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem.



Rys. 6.15a

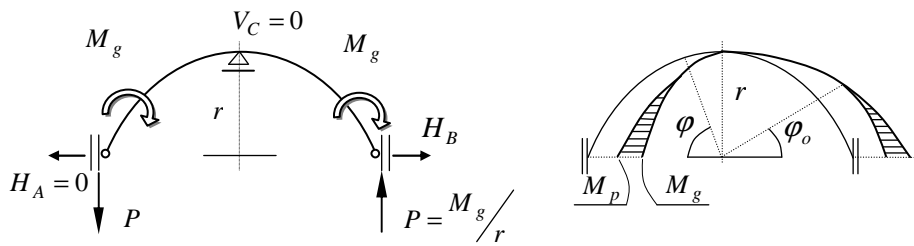
Rozwiązanie:

W ruchu łuku wynikającym z osiadania podpór można wydzielić ruch sztywny, pionowy o wartości średniej $0.5 \cdot (U_A + U_B)$ oraz pozostały generujący stany naprężeń w łuku.



Rys. 6.15b

W dalszych rozważaniach analizować będziemy jedynie ten niesymetryczny ruch podpór U wywołujący stany naprężeń. Wprowadzić należy teraz równoważny kinematycznie mechanizmu i badać w nim stany naprężeń



Rys. 6.15c

Wprowadzony w rozważania mechanizm będzie w równowadze jeżeli $P = \frac{M_p}{r}$. W miarę wzrostu przemieszczenia u zwiększają się momenty utwierdzenia $M_A = M_B = M_g$.

Rozkłady momentów zginających mają postać

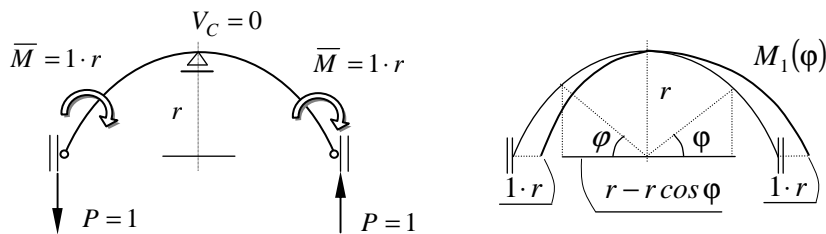
$$M(\varphi) = M_p - \frac{M_p}{r}(r - r\cos\varphi) \Rightarrow M'(\varphi) = M_g - \frac{M_g}{r}(r - r\cos\varphi) = M_g \cos\varphi$$

Zasięg momentów nadwyżkowych obliczymy przyrównując $M'(\varphi)$ do M_p czyli

$$M_p = M_g - M_g(1 - \cos\varphi_0) \quad \text{stąd} \quad \cos\varphi_0 = \frac{M_p}{M_g} \Rightarrow \varphi_0 = \arccos\left(\frac{M_p}{M_g}\right)$$

Odkształcenia wystąpią tylko w przedziale $(0, \varphi_0)$ z obu stron utwierdzenia.

Sporządzimy z kolei wykres momentów pochodzących od sił jednostkowych przyłożonych w miejscu i kierunku poszukiwanych przemieszczeń.



Rys. 6.15d

$$1 \cdot 2r = 2\overline{M} \Rightarrow M = 1 \cdot r$$

$$M_1(\varphi) = 1r - 1(r - r\cos\varphi) = r\cos\varphi$$

Wartość poszukiwanego przemieszczenia u wyliczymy korzystając z zasady prac dopełniających

$$\begin{aligned}
 1 \cdot u &= \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{E'J} [M'(\varphi) - M_p] M_1(\varphi) r d\varphi = \\
 &= \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{E'J} [M_g \cos \varphi - M_p] r \cos \varphi r d\varphi = \\
 &= \frac{M_g r^2}{E'J} \int_0^{\varphi_0} \left(\cos^2 \varphi - \frac{M_p}{M_g} \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{M_g r^2}{E'J} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{M_p}{M_g} \sin \varphi \right]_0^{\varphi_0}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie graniczna wartość różnicy osiadań podpór $\Delta = 2u$ wynosi

$$\Delta = 2u = \frac{M_g r^2}{E'J} \left(\varphi_0 + \frac{\sin 2\varphi_0}{2} - \frac{M_p}{M_g} \sin \varphi_0 \right)$$

i o taką wartość co najwyżej mogą się różnić osiadania pionowe podpór łuku bezprzegubowego.

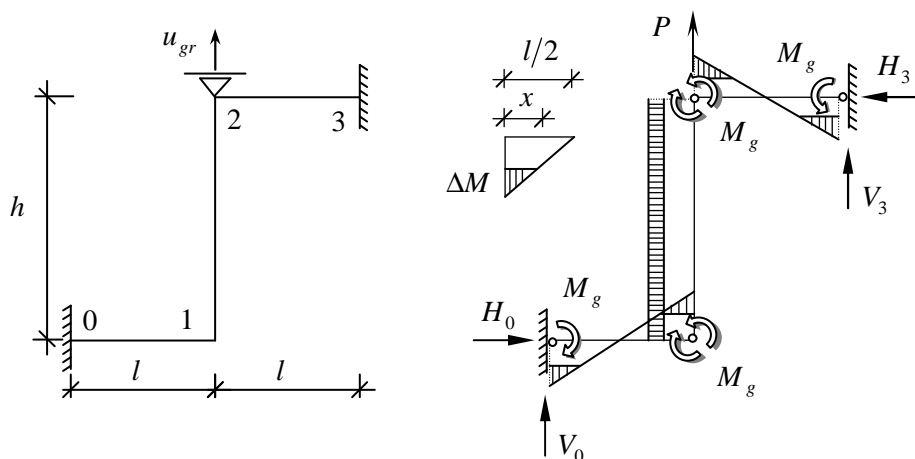
Podobnie jak w poprzednich przykładach wartość M_p , M_g i J dla przekrojów prostokątnych axh są

$$\begin{aligned}
 M_p &= \sigma_p W_p, \quad M_g = \sigma_g W_p, \quad W_p = \frac{ah^2}{4} \\
 J &= \frac{ah^3}{12}, \quad E' = \frac{\sigma_g - \sigma_p}{\varepsilon_g}
 \end{aligned}$$

gdzie σ_p , σ_g , ε_g , W_p i J są kolejno granicami plastyczności, wytrzymałości, odkształceniem granicznym, wskaźnikiem plastyczności i momentem bezwładności przekroju prostokątnego.

ZADANIE 6.16.

W układzie prętowym przedstawionym na rys. 6.16a należy określić wartość graniczną pionowego przemieszczenia słupka 1-2. W rozważaniach należy korzystać z modelu ciała sztywno-plastycznego z liniowym wzmocnieniem.



Rys. 6.16a

Rozwiązanie

Oprócz wyjściowego zadania analizować będziemy równowazne mu kinematycznie po odrzuceniu podpory ulegającej przemieszczeniu i zastąpieniu jej przez siłę wymuszającą deformację układu.

Warunki równowagi granicznej

$$V_0 + V_3 = P$$

$$H_0 - H_3 = 0$$

$$V_0 l + M_g + M_g = 0$$

$$V_0 l - H_0 h + 2M_g = 0$$

$$V_0 2l - H_0 h + Pl - M_g + M_g = 0$$

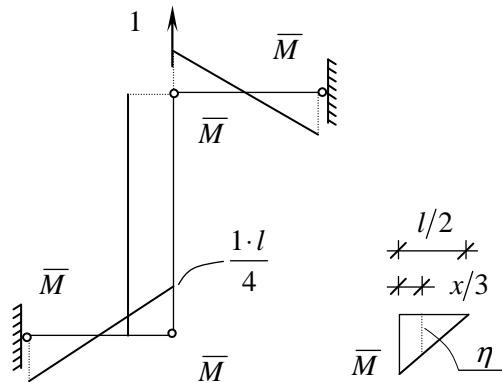
Wartości sił w więzach wynoszą $V_0 = 2M_g/l = V_3$, $H_0 = H_3 = 0$, $P = 4M_g/l$

Momenty nadwyżkowe pojawią się w słupie 1-2 oraz w przywęzłowych częściach prętów poziomych. Wykres momentów zginających pochodzących od obciążenia $P=l$ przyłożonego w miejscu poszukiwanego przemieszczenia w samorównoważonym mechanizmie ma postać

$$P = \frac{4M_g}{l} \text{ oraz } P \rightarrow 1$$

stąd

$$1 = \frac{4\bar{M}}{l} \Rightarrow \bar{M} = \frac{1 \cdot l}{4}$$



Rys. 6.16b

Z podobieństwa wykresów momentów wyznaczamy rzędną $\eta = \bar{M} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x}{l} \right)$.

Wartość poszukiwanego przemieszczenia granicznego uzyskamy z „przemnożenia” momentów nadwyżkowych ΔM i jednostkowego M_j .

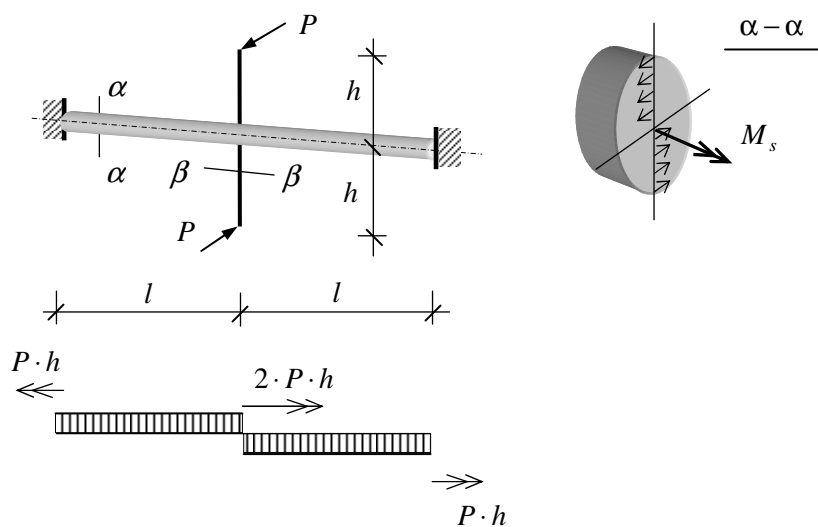
$$u = \frac{1}{E'J} \left[4 \frac{\Delta M x}{2} \cdot \eta + \Delta M h \bar{M} \right] = \frac{1}{E'J} \left[\frac{\Delta M^2}{M_g} l \cdot \frac{1l}{4} \left(1 - \frac{2x}{3l} \right) + \Delta M \frac{1lh}{4} \right]$$

Ostatecznie

$$u = \frac{1}{E'J} \left[\frac{\Delta M^2}{4M_g} l^2 \left(1 - \frac{\Delta M}{3M} \right) + \Delta M \frac{lh}{4} \right]$$

ZADANIE 6.17.

Należy określić nośność układu prętowego przedstawionego na rys. 6.17 o granicy plastyczności σ_p .



Rys. 6.17

Rozwiązanie

W układzie mogą wystąpić dwa mechanizmy zniszczenia:

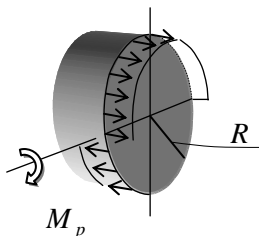
- uplastycznienia wsporników
- uplastycznienia belki w wyniku skręcania.

Przed wyznaczeniem nośności obliczymy momenty uplastycznienia przekrojów kołowych pochodzące zarówno od zginania jak i skręcania.

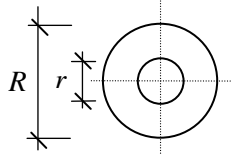
Zginający moment uplastycznienia wynosi

$$M_p = 2\sigma_p \left(\frac{\pi \cdot R^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{4R}{3\pi} \right) = \frac{4}{3} R^3 \sigma_p$$

- przekrój pełny



$$M_p = 2\sigma_p \left[\frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} \right] = \frac{4}{3} (R^3 - r^3) \sigma_p \quad \text{- rura o promieniach } r \text{ i } R$$



Skręcający moment uplastycznienia wynosi

$$K_p = \int_F \tau_p \rho dF = \tau_p \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi d\rho = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_p \quad \text{-przekrój pełny}$$

$$K_p' = \tau_p \int_r^R \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi d\rho = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_p \Big|_r^R = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) \tau_p \quad \text{- w rurze}$$

Nośność w wyniku uplastycznienia współników w przekroju β – β obliczymy z zależności

$$\mu_1 Ph = M_p \Rightarrow \mu_1 = \frac{4(R^3 - r^3) \sigma_p}{3Ph} = \frac{4}{3} \frac{(R^3 - r^3)}{Ph} \sigma_p$$

Drugi z mechanizmów związany z uplastycznieniem w wyniku skręcania belki polega na osiągnięciu przez moment skręcający Ph wartości granicznej $K_p (\tau_p = \sqrt{3} \sigma_p)$.

$$\mu_2 Ph = K_p \Rightarrow \mu_2 = \frac{2\pi (R^3 - r^3) \tau_p}{3Ph} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \frac{(R^3 - r^3)}{Ph} \sigma_p$$

Z porównania mnożników wynika, że $\mu_1 < \mu_2$, czyli występuje pierwszy z mechanizmów zniszczenia.

Jeżeli natomiast założymy równoczesne wystąpienie obu mechanizmów zniszczenia $\mu_1 = \mu_2$ przy różnych wymiarach belki skręcanej i współników, to zachodzi

$$\begin{aligned}\mu_1 = \mu_2 &\Rightarrow \frac{4}{3} \frac{(\bar{R}^3 - \bar{r}^3)}{Ph} \sigma_p = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \frac{(R^3 - r^3)}{Ph} \sigma_p \\ &\Rightarrow \bar{R}^3 - \bar{r}^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi (R^3 - r^3)\end{aligned}$$

Otrzymana równość pozwala określać współzależność wymiarów przekrojów belki i wsporników w przypadku ich jednoczesnego uplastycznienia.